中国科学 : 数学 2011 年 第 42 卷 第 4 期 : 329～340
www.springerlink.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

一类共形不变摄动积分方程正解的存在性

许建开①*, 伍火熊②, 谭忠②
① 湖南农业大学数学系, 长沙 410128;
② 厦门大学数学科学学院, 厦门 316005
E-mail: jiankaixu@126.com, hxwu@xmu.edu.cn, tanz@163.com

收稿日期: 2011-02-20; 接受日期: 2011-12-22; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 10976026, 1107120)、国家自然科学基金专项基金 – 天元基金 (批准号: 11126148)、福建省自然科学基金 (批准号: 2010J01013) 以及湖南省农业大学大学生创新性试验计划 (批准号: XCX1122) 资助项目

摘要 本文讨论了一类共形不变摄动积分方程正解的存在性. 我们证明了: 当参数对 (p,q) 属于集合 $(-n,0)\times(0,\infty)$ 且 $pq+p+2n=0$ 时, 对应摄动积分方程存在正解; 而当参数对 (p,q) 属于集合 $(0,\infty)\times(-\infty,0)$ 也满足 $pq+p+2n=0$ 时, 摄动积分方程不存在非负解. 这与原共形不变积分方程有着本质的不同, 此结果隐含着这类积分方程正解的存在性取决于解在无穷远处的性态.

关键词 积分方程 压缩映射 移动平面法 径向对称解 Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式

MSC (2010) 主题分类 45E10, 45M2, 35J45

1 引言

本文的主要目的为研究下列积分方程正解的存在性,

$$u(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(b+|x-y|)^p u^q(y)dy,\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,\ b>0, \tag{1.1}$$

这里 $p\in(-n,0)\cup(0,\infty)$, $q\in\mathbb{R}^1$ 且满足 $pq+p+2n=0$.

就我们所知, 上述积分方程主要产生于两个方面. 其一, 系统 (1.1) 来源于下列不等式的最佳常数问题,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x)}{(b+|x-y|)^\lambda}g(y)dydx\leqslant C(s,n,\lambda)\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.2}$$

其中 $0<\lambda<n$, $r,s>1$ 且满足 $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{\lambda}{n}=2$. 具体而言, 为得到不等式 (1.2) 的最佳常数 $C(s,n,\lambda)$, 我们在约束条件 $\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}=\|g\|_{L^s(\mathbb{R}^n)}=1$ 以及 $f,g>0$ 下, 求下列泛函的最大值:

$$J(f,g)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x)\ g(y)}{(b+|x-y|)^\lambda}\ dxdy. \tag{1.3}$$

经计算可得其对应的 Euler-Lagrange 方程满足如下积分方程组:

$$\begin{cases}\lambda_1 rf(x)^{r-1}=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\frac{g(y)}{(b+|x-y|)^\lambda}dy,\\ \lambda_2 sg(x)^{s-1}=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{(b+|x-y|)^\lambda}dy,\end{cases} \tag{1.4}$$

英文引用格式: Xu J K, Wu H X, Tan Z. Existence of positive solution to a perturbed conformal invariant integral equation (in Chinese). Sci Sin Math, 2012, 42(3): 329–340, doi: 10.1360/012011-119

其中 λ_1, λ_2 为两个绝对常数且满足 $\lambda_1 r = \lambda_2 s = J(f,g)$. 类似于文献 [1–4], 设 $u = c_1 f^{r-1}, v = c_2 g^{s-1}, \tau = \frac{1}{r-1}, q = \frac{1}{s-1}$, 其中 c_1 与 c_2 是两个待定常数, 使得系统 (1.4) 可表示为

$$\begin{cases} u(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^q(y)}{(b+|x-y|)^\lambda} dy, \\ v(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^\tau(y)}{(b+|x-y|)^\lambda} dy. \end{cases} \tag{1.5}$$

特别地, 当 $\tau = q$ 且 $u = v$ 时, 我们用 p 替代 $-\lambda$, 则系统 (1.5) 简化为积分方程 (1.1).

其二, 系统 (1.1) 也来源于共形不变几何. 具体而言, 由于 Riemannian 流形 $M_n\,(n \geqslant 3)$ 上的 Laplace 算子 Δ 不是共形不变的, 因此在 Riemannian 流形 M_n 上找到共形不变的算子是十分有意义且有趣的事情. Fefferman 与 Graham 在文献 [11] 中发现如下共形不变算子:

$$P_h = \Delta_h^2 - \delta[(a_n R_h h + b_n \mathrm{Ric}_h)d] + \frac{n-4}{2} Q_h, \tag{1.6}$$

其中 R_h 与 Ric 分别表示 Riemannian 度量 h 的纯曲率与 Ricci 曲率, δ 为散度算子. $a_n = [(n-2)^2 + 4]/2(n-1)(n-2)$, $b_n = -4/(n-2)$ 以及

$$Q_h = \frac{-1}{2(n-1)} \Delta R_h + \frac{n^3 - 4n^2 + 16n - 16}{8(n-1)^2(n-2)^2} R_h^2 + \frac{-2}{(n-2)^2} |\mathrm{Ric}|^2. \tag{1.7}$$

P_h 有如下重要的性质: 当 $\overline{h} = u^{4/(n-4)} h$ 为 h 的保形度量时, 则对于任意 $\varphi \in C^\infty(M_n)$ 有

$$P_h(\varphi u) = u^{\frac{n+4}{n-4}} P_{\overline{h}}(\varphi). \tag{1.8}$$

特别地, 在上式中分别取 $\varphi = 1$, $M_n = \mathbb{R}^n$, 并在 $M_n = \mathbb{R}^n$ 上赋予标准的 Euclidean 度量 h, 则系统 (1.8) 可简化为:

$$(-\Delta)^2 u = C(n) u^{\frac{n+4}{n-4}}. \tag{1.9}$$

在 (1.9) 中, 用 q, $(p+n)/2$ 分别替代 $\frac{n+4}{n-4}$ 与 2, 则

$$(-\Delta)^{\frac{p+n}{2}} u = C(n) u^q, \tag{1.10}$$

当 $-n < p < 0$ 时, 在分布意义下, 系统 (1.10) 可表示为:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^p u^q(y) dy, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.11}$$

易见, 方程 (1.11) 为 (1.1) 的一种特殊情形, 即 $b = 0$. 方程 (1.11) 称为共形不变的, 如果满足如下条件: 设 $v(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的非负函数. 对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\beta > 0$, 定义

$$v_{x,\beta}(\xi) \triangleq \left(\frac{|\xi - x|}{\beta}\right)^p v(\xi^{x,\beta}),$$

这里

$$\xi^{x,\beta} \triangleq x + \frac{\beta^2(\xi - x)}{|\xi - x|^2}.$$

若 u 为系统 (1.11) 的解, 则 $u_{x,\beta}$ 也是其一个解. 想进一步了解共形不变算子以及相关问题背景的读者可参阅文献 [1,5,6] 及其参考文献.

在叙述我们的主要结果之前, 我们先回顾一些已有的相关结果. 利用球极投影映射, Lieb 在文献 [1] 中证明了当参数对 (p,q) 属于集合 $(-n,0)\times(0,\infty)$ 且 $pq+p+2n=0$ 时, 系统 (1.11) 存在径向对称的正解. 随后, 在相同的条件下, Chen 等人在文献 [7,8] 中, 利用积分型的移动平面法证明了: 在不计平移、伸缩以及 Kelvin 变换的意义下, 系统 (1.11) 在 $L_{\mathrm{loc}}^{\frac{2n}{-p}}(\mathbb{R}^n)$ 中存在唯一正解. 他们也推出 u 是关于 $\mathbb{R}^n$ 中某一点径向对称且单调递减的, 并且 u 可表示为

$$u(x)=\left(\frac{d+|x-x_0|^2}{a}\right)^{p/2},\qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.12}$$

其中 $x_0\in\mathbb{R}^n$; $d,a>0$. 当参数对 (p,q) 满足 $p>0$ 以及 $-\frac{2n}{p}-1<q<0$ 时, Li 在文献 [5] 中, 利用移动球面法证明了系统 (1.11) 不存在非负 Lebesgue 可测解, 但是当 $p\in(0,\infty)$ 以及 $q=-\frac{2n}{p}-1$ 时, 系统 (1.11) 存在正解且其可表为 (1.12) 的形式. 最近, Xu 在文献 [9,10] 中, 考虑了参数对满足 $p\in(0,\infty),q<-\frac{2n}{p}-1$ 的情况, 得到了此时系统 (1.11) 存在 C^1 的正解当且仅当 $pq+p+2n=0$.

从分析的观点来看, 上面的结论产生了一个自然而有趣的问题. 当系统 (1.11) 中的 Riesz 卷积核进行一个摄动变为 Bessel 核 (即 (1.1)), 在相同的条件下 (即参数对 (p,q) 满足 $pq+p+2n=0$), 对应积分系统正解的存在性是否还与原系统一样呢? 本文将回答这一问题, 并且发现了一个有趣且异于系统 (1.11) 的现象. 我们的主要结果如下:

定理 1.1 (i) 当参数对 (p,q) 属于集合 $(-n,0)\times(0,+\infty)$ 且 $pq+p+2n=0$ 时, 系统 (1.1) 在 $C^\infty(\mathbb{R}^n)\cap L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}(\mathbb{R}^n)$ 中存在正解, 并且这个解关于 $\mathbb{R}^n$ 中某一点是径向对称且单调递减的;

(ii) 当参数对 (p,q) 属于集合 $(0,\infty)\times(-\infty,0)$ 也满足 $pq+p+2n=0$ 时, 系统 (1.1) 不存在非负 Lebesgue 可测解.

注记 1.2 当 $b<0$ 时, 系统 (1.1) 是不适定的. 因此本文我们只考虑系统 (1.11) 的非负摄动, 即 $b>0$. 同时也注意到当参数对 (p,q) 属于集合 $(-n,0)\cup(0,\infty)\times\mathbb{R}^1$ 且 $p\,q+p+2n=0$ 时, 系统 (1.11) 是一个共形不变的积分方程. 这意味着 $u(x)$ 在无穷远处的性态可通过 Kelvin 变换在某一个球内表示出来. 因此, 在这种情况下研究系统 (1.11), 我们只需研究 $u(x)$ 在某个球内的性质就足够了. 对比于系统 (1.11), 方程 (1.1) 不再是共形不变的, 因此我们不得不去讨论 $u(x)$ 在无穷远处的渐近性态. 从上面我们得到结果来看, 系统 (1.1) (包含 $b=0$) 正解的存在性实际上取决于 $u(x)$ 在无穷远处的性态. 这解释了为什么系统 (1.1) 在 $-n<p<0$ 时, 有一个正解以及在 $p>0$ 时, 不存在非负解, 但是当 $b=0$ 时, 对应的系统 (1.11) 至少具有一个正解.

本文安排如下, 在第 2 节中, 我们将给出一些技术性引理. 定理 1.1 的证明将在第 3 节给出. 为方便起见, 在全文中我们总用字母 C 表示一个正常数, 它在每处出现的值可以不同, 但都与基本变量无关.

2 预备引理

引理 2.1 (Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式 [3,4])

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, g(y)|x-y|^{-\lambda}dxdy\right|\leqslant C_{\lambda,s,n}\|f\|_{L^r}\|g\|_{L^s}, \tag{2.1}$$

对于所有 $f\in L^s(\mathbb{R}^n),g\in L^r(\mathbb{R}^n)$, 其中 $1<r,s<\infty$, $1/r+1/s+\lambda/n=2$ 以及 $0<\lambda<n$.

Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式有下列等价形式:

$$\|I_p(f)\|_{L^t(\mathbb{R}^n)}\leqslant C(n,t,s)\|f\|_{L^{\frac{nt}{n+(n+p)t}}(\mathbb{R}^n)},\quad \forall\ t\ >-\frac{n}{p}. \tag{2.2}$$

这里 $I_p(f)$ 为经典的 Riesz 位势算子, 即

$$I_p(f)(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^p f(y)dy, \quad -n<p<0. \tag{2.3}$$

为证明定理 1.1, 这里我们需要对方程 (1.1) 的正解做一些先验估计.

引理 2.2 设参数对 (p,q) 属于集合 $(-n,0)\times(0,\infty)$. 若 $u(x)$ 是对应系统 (1.1) 的一个正解且不恒等于无穷大, 则 $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

证明 由假设可得, 存在 $\overline{x}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $u(\overline{x})<\infty$. 因此, 对于每一个固定的 $x\in\mathbb{R}^n$, 存在一个充分大的 $R\geqslant 1$ 使得 $x,\overline{x}\in B_R$. 下面, 我们将推出 $u\in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $\int_{|y|\geqslant 2R}|y|^p u^q(y)dy<\infty$.

首先, 注意到当 $|x|<R$, $|y|<2R$ 时, 易得 $b+|x-y|<b+3R$ 以及

$$\int_{|y|\leqslant 2R}(b+3R)^p u^q(y)dy \leqslant \int_{|y|\leqslant 2R}(b+|\overline{x}-y|)^p u^q(y)dy < u(\overline{x})<\infty, \tag{2.4}$$

这隐含着 $u\in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 同时注意到当 $|y|>2R$ 以及 $|x|<R$ 时, 我们有 $b+|x-y|<b+2|y|\leqslant C(b,R)|y|$ 以及

$$C(b,R)\int_{|y|\geqslant 2R}|y|^p u^q(y)dy \leqslant \int_{|y|\geqslant 2R}(b+|\overline{x}-y|)^p u^q(y)dy < u(\overline{x})<\infty. \tag{2.5}$$

现重述 (1.1) 如下:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{|y|\leqslant 2R}(b+|x-y|)^p u^q(y)dy + \int_{|y|\geqslant 2R}(b+|x-y|)^p u^q(y)dy \\ &\triangleq I(x)+II(x). \end{aligned} \tag{2.6}$$

我们先来估计 $I(x)$. 当 $|x|\leqslant R$ 以及 $k\geqslant 0$ 时, 有

$$\int_{|y|\leqslant 2R}(b+|x-y|)^{p-k}u^q(y)dy \leqslant b^{p-k}\int_{|y|\leqslant 2R}u^q(y)dy<\infty. \tag{2.7}$$

因此, 当 $|x|<R$ 时, 我们能对函数 $I(x)$ 求微分, 且 $I(x)\in C^\infty(B_R)$. 类似地, 由 (2.5), 易推出 $II(x)\in C^\infty(B_R)$. 这结合 (2.7) 则得 $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. □

引理 2.3 设 u 为定义在 $\mathbb{R}^n$ $(n\geqslant 1)$ 上的一个非负 Lebesgue 可测实值函数且参数对 (p,q) 属于集合 $(0,\infty)\times(-\infty,0)$. 若 u 是方程 (1.1) 的一个解, 则存在一个绝对常数 $C\geqslant 1$ 使得下列先验估计成立:

$$\frac{1+|x|^p}{C}\leqslant u(x)\leqslant C(1+|x|^p), \tag{2.8}$$

$$0<\frac{1}{C}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}u^{1+q}(y)dy\leqslant C<\infty, \quad \text{对 } q+1\neq 0, \tag{2.9}$$

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^{-p}u(x)=\lim_{|x|\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(b+|x-y|)^p}{|x|^p}u^q(y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}u^q(y)dy, \tag{2.10}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|y|)^p u^q(y)dy\leqslant C<\infty. \tag{2.11}$$

证明 首先注意到参数对 (p,q) 属于集合 $(0,\infty)\times(-\infty,0)$, 则我们断言:

$$|\{y\in\mathbb{R}^n : u(y)<\infty\}|>0. \tag{2.12}$$

事实上, 若 (2.12) 不真, 则

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : u(y) < \infty\}| = 0.$$

容易推出 $u(y) = \infty$, a.e., 其显然与假设相矛盾. 因此, 一定存在一个正数 $R > 1$ 以及 $E \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$E \subset \{y \mid u(y) < R\} \cap B_R(0), \qquad |E| \geqslant \frac{1}{R}. \tag{2.13}$$

结合 (1.1) 隐含着 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (b + |x-y|)^p u^q(y) dy \geqslant \int_E (|x-y| + b)^p u^q(y) dy \\ &\geqslant R^q \int_E (|x-y| + b)^p \ dy \geqslant b^p \ R^{p-1}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

同时注意到对于任意的 $|y| \leqslant R$ 以及 $|x| \geqslant 2R$, 我们有

$$u(x) \geqslant R^q \int_E |x-y|^p dx \geqslant R^{q-1} \left(\frac{|x|}{2}\right)^p. \tag{2.15}$$

因此 (2.8) 式中前一部分的不等式可由 (2.14) 和 (2.15) 推出. 下面, 我们将证明后一部分的不等式. 首先, 注意到当 $1 \leqslant |\overline{x}| \leqslant 2$, $|y| \geqslant 4$ 时, 我们有 $|\overline{x} - y| \geqslant 2$ 以及

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_4(0)} u^q(y) dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} u^q(y)(b + |\overline{x} - y|)^p dy < +\infty, \tag{2.16}$$

由此和 (2.8) 的前一部分不等式以及 $q < 0$, 可得

$$u^q \in L^1(\mathbb{R}^n). \tag{2.17}$$

类似地, 当 $1 \leqslant |\overline{x}| \leqslant 2$ 以及 $|y| \geqslant 4$ 时, 易知

$$|y|^p \leqslant 2^p \ |y - \bar{x}|^p, \tag{2.18}$$

综合 (2.17) 和 (2.18) 得

$$|y|^p u^q(y) \in L^1(\mathbb{R}^n). \tag{2.19}$$

进一步, 注意到

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^p u^q(y) dy &= \int_{|y|>4} |y|^p u^q(y) dy + \int_{|y| \leqslant 4} |y|^p u^q(y) dy \\ &\leqslant 2^p \int_{\mathbb{R}^n} (b + |\overline{x} - y|)^p u^q(y) dy + 4^p \int_{\mathbb{R}^n} u^q(y) dy \\ &\leqslant 2^p u(\overline{x}) + 4^p \|u^q\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty. \end{aligned} \tag{2.20}$$

同时注意到当 $|x| > 1$ 时, 有

$$\left| \frac{(b + |x-y|)^p}{|x|^p} u^q(y) \right| \leqslant C(b + 1 + |y|^p) u^q(y). \tag{2.21}$$

由此及 (2.18), (2.19) 和控制收敛定理可知

$$\lim_{|x| \to \infty} (|x|^{-p} u(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} u^q(y) dy. \tag{2.22}$$

因而, (2.8) 第二个不等式以及 (2.10) 成立.

接下来, 我们将证明 (2.9). 首先由 (2.8) 及 (2.19) 易得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R(0)} u^{q+1}(y)dx &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R(0)} u^q(y)u(y)dx \\ &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R(0)} u^q(y)(|y|^p)dy < \infty. \end{aligned} \tag{2.23}$$

再结合 (2.8) 可知 (2.9) 成立. 最后, 注意到 (2.11) 可由 (2.18) 以及 (2.19) 推出. 引理 2.3 得证. □

引理 2.4 在引理 2.3 假设条件下, 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1}u^q(y)dy \geqslant C(b,n,p,q) > 0. \tag{2.24}$$

证明 对于每一个固定的 $R>1$, 由引理 2.3, 我们推出当 $p\leqslant 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1}u^q(y)dydx \\ &\geqslant \int_{|x|\leqslant R}\int_{|y|\leqslant R} u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1}u^q(y)dydx \\ &\geqslant C(b+2R)^{p-1}\left\{\int_{|y|\leqslant R}(1+|y|^p)^q(y)dy\right\}^2 \\ &\geqslant C_n(b+2R)^{p-1}(1+|R|^p)^{2q}R^{2n} > 0. \end{aligned} \tag{2.25}$$

类似地, 当 $p\geqslant 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1}u^q(y)dydx \\ &\geqslant \int_{|x|\leqslant R}\int_{4R\geqslant|y|\geqslant 2R} u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1}u^q(y)dydx \\ &\geqslant C(b+R)^{p-1}\int_{|x|\leqslant R}\int_{4R\geqslant|y|\geqslant 2R} u^q(x)u^q(y)dydx \\ &\geqslant C_n(b+R)^{p-1}(1+|4R|^p)^{2q}R^{2n} > 0, \end{aligned} \tag{2.26}$$

由此及 (2.25) 可知引理 2.4 得证. □

引理 2.5 设 $n\geqslant 1, p>0, q<0$, 若 u 是方程 (1.1) 的一个 Lebesgue 非负实值可测解, 则在分布意义下, 我们有 $\nabla u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(b+|x-y|)^{p-1}\frac{(x-y)}{|x-y|}u^q(y)dy$. 即, 对于任意的 $\varphi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\nabla\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} p(b+|x-y|)^{p-1}\frac{(x-y)}{|x-y|}u^q(y)dy\ \varphi(x)dx. \tag{2.27}$$

证明 首先, 分别定义 $M_1(y)$, $M_2(y)$ 和 $D(x)$ 如下:

$$M_1(y) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\varphi)(x)(b+|x-y|)^p dx, \quad \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{2.28}$$

$$M_2(y) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} p(b+|x-y|)^{p-1}\frac{(x-y)}{|x-y|}\varphi(x)dx, \quad \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{2.29}$$

$$D(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} p(b+|x-y|)^{p-1}\frac{(x-y)}{|x-y|}u^q(y)dy. \tag{2.30}$$

注意到当 $p<1$ 时, 我们有 $(b+|x-y|)^{p-1}\leqslant b^{p-1}$. 类似地, 当 $p\geqslant 1$ 时, 易得

$$(b+|x-y|)^{p-1}\leqslant [b+(|x|+1)(1+|y|)]^{p-1}\leqslant [b+(|x|+1)(1+|y|)]^{p}\leqslant 2^p[b^p+(|x|+1)^p(1+|y|)^p].$$

这结合 $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 以及 (2.11) 可知 $M_1(y)$, $M_2(y)$ 以及 $D(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是适定的. 并且, 由分部积分公式知,

$$\begin{aligned}M_1(y)&=\int_{\mathbb{R}^n}(\nabla\varphi)(x)(b+|x-y|)^p dx\\&=-\int_{\mathbb{R}^n}p(b+|x-y|)^{p-1}\frac{(x-y)}{|x-y|}\varphi(x)dx=-M_2(y).\end{aligned}\tag{2.31}$$

现在来证明 (2.27). 注意到

$$\begin{aligned}&\int\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi(x)(b+|x-y|)^p u^q(y)|dxdy\\&\leqslant\int\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}2^p[b^p+(1+|x|)^p(1+|y|)^p]|\nabla\varphi(x)|u^q(y)\\&\leqslant(2)^p\bigg\{\int\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}(1+|x|)^p|\nabla\varphi(x)|(1+|y|)^p u^q(y)\\&\quad+b^p\ |\nabla\varphi(x)\ |u^q(y)\ dxdy\bigg\}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

由此及 $\nabla\varphi\in C_0^\infty$ 和 (2.11) 可知 $\nabla\varphi(x)(b+|x-y|)^p u^q(y)$ 在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上绝对可积的. 由 Fubini 定理, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\nabla\varphi(x)dx&=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(b+|x-y|)^p u^q(y)dy\ \nabla\varphi(x)dx\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(b+|x-y|)^p u^q(y)\ \nabla\varphi(x)dxdy.\end{aligned}\tag{2.33}$$

由 (2.31), 我们可重述 (2.33) 如下:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\nabla\varphi(x)dx&=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(b+|x-y|)^p u^q(y)\ \nabla\varphi(x)dxdy\\&=-\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}p(b+|x-y|)^{p-1}\frac{(x-y)}{|x-y|}\varphi(x)dxu^q(y)dy.\end{aligned}\tag{2.34}$$

注意到当 $p<1$ 时, 有 $(b+|x-y|)^{p-1}\leqslant b^{p-1}$ 以及 $p\geqslant 1$ 时, 有 $(b+|x-y|)^{p-1}\leqslant(b+(|x|+1)(|y|+1))^{p-1}\leqslant 2^p(b^p+(|x|+1)^p(|y|+1)^p)$. 因此,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left|p(b+|x-y|)^{p-1}\frac{(x-y)}{|x-y|}u^q(y)\varphi(x)\right|dydx\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}p(b^{p-1}+2^p(b^p+(|x|+1)^p(|y|+1)^p))u^q(y)\varphi(x)dydx,\end{aligned}\tag{2.35}$$

这结合 $\varphi\in C_0^\infty$ 以及 (2.11), 可知 $p(b+|x-y|)^{p-1}\frac{(x-y)}{|x-y|}u^q(y)\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上绝对可积. 因此, 由 (2.34) 以及 Fubini 可推出 (2.27). 引理 2.5 得证. □

对于任意给定的 $\tau\in\mathbb{R}$, 定义

$$\Sigma_\tau=\{x=(x_1,\dots,x_n)\mid x_1\geqslant\tau\},$$

并记 $x^{\tau}=(2\tau-x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $u_{\tau}(x)=u(x^{\tau})$. 则我们有以下引理.

引理 2.6 若 u 是方程 (1.1) 的任意一个解, 则

$$u(x)-u_{\tau}(x)=\int_{\Sigma_{\tau}}((b+|x-y|)^p-(b+|x^{\tau}-y|)^p)(u^q(y)-u_{\tau}^q(y))dy. \tag{2.36}$$

证明 由变量替换以及 $|x-y^{\tau}|=|x^{\tau}-y|$, 可知

$$u(x)=\int_{\Sigma_{\tau}}(b+|x-y|)^p u(y)^q dy+\int_{\Sigma_{\tau}}(b+|x^{\tau}-y|)^p u_{\tau}(y)^q dy. \tag{2.37}$$

在上式中用 x^{τ} 替换 x, 易得

$$u_{\tau}(x)=\int_{\Sigma_{\tau}}(b+|x^{\tau}-y|)^p u(y)^q dy+\int_{\Sigma_{\tau}}(b+|x-y|)^p u_{\tau}(y)^q dy. \tag{2.38}$$

因此, 从 (2.37) 和 (2.38) 容易导出 (2.36). 引理 2.6 得证. □

3 定理 1.1 的证明

首先, 我们来证明定理 1.1 的第一部分, 即 $p\in(-n,0)$ 的情形. 设

$$S(f)=T_A(f)+F, \tag{3.1}$$

其中 $F(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(b+|x-y|)^p(u(y)-u_A(y))^q dy$. $T_A(f)$ 定义如下:

$$T_A(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(b+|x-y|)^p u_A^{q-1}(y)f(y)dy, \tag{3.2}$$

这里 A 是一个待定常数, 其将在后面确定.

$$u_A(x)=\begin{cases} u(x), & u(x)\geqslant A, \text{或 } |x|\geqslant A, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

我们将证明 $S(f)$ 是一个从 $L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}(\mathbb{R}^n)$ 到自身的压缩算子. 事实上, 由引理 2.1 以及 Hölder 不等式, 我们有

$$\|T_A(f)\|_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}}\leqslant\|u_A^{q-1}f\|_{L^{\frac{n(q-1)}{(n+p)q}}}\leqslant\|u_A\|^{q-1}_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}}\|f\|_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}}. \tag{3.3}$$

因此, 结合 $u\in L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}$ 以及取 A 充分大使得 $\|u_A\|_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}}\leqslant 1/2$, 可知 $T_A(f)$ 是一个压缩映射.

同时注意到 $u-u_A$ 是一个具有紧支集的有界函数, 由引理 2.1, 易推出

$$\|F\|_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}}\leqslant\|(u-u_A)^q\|_{L^{\frac{n(q-1)}{(n+p)q}}}. \tag{3.4}$$

由此及 (3.3) 可知 $S(f)$ 为 $L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}$ 到自身的一个压缩映射. 因此, 方程 (1.1) 在 $L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}$ 中在存在一个唯一的正解.

下面, 我们将利用的文献 [7] 方法与思想证明上面所得到的正解是关于 $\mathbb{R}^n$ 中某一点径向对称且单调递减的. 为简单起见, 这里仅写出证明的步骤, 主要分成如下两步. 第一步, 我们将证明对于方程 (1.1) 下列事实成立: 存在一个充分大的 $N>0$ 使得对于任意的 $\tau \leqslant -N$, 有

$$u(x) \geqslant u_\tau(x), \quad x \in \Sigma_\tau = \{x=(x_1,\dots,x_n) \mid x_1 \geqslant \tau\}. \tag{3.5}$$

事实上, 对于任意 $x,y \in \Sigma_\tau$, 有 $|x-y| < |x^\tau - y|$ ，再由引理 2.6 可知,

$$u_\tau(x) - u(x) \leqslant q \int_{\Sigma_\tau^u} (b+|x-y|)^p [u_\tau^{q-1}(y)(u_\tau - u)(y)] dy, \tag{3.6}$$

其中 $\Sigma_\tau^u = \{x \in \Sigma_\tau \mid u(x) < u_\tau(x)\}$. 这结合引理 2.1 以及 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\|u_\tau(x) - u(x)\|_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}(\Sigma_\tau^u)} &\leqslant C\|u_\tau^{q-1}(u_\tau - u)(y)\|_{L^{\frac{n(q-1)}{(n+p)q}}(\Sigma_\tau^u)} \\ &\leqslant C\|u_\tau\|^{q-1}_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}(\Sigma_\tau^u)} \|u_\tau - u\|_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}(\Sigma_\tau^u)}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

因此, 当 $|\tau|$ 取为一个充分大的数使得 $C\|u_\tau\|^{q-1}_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}(\Sigma_\tau^u)} < 1/2$. 由此知 Σ_τ^u 是一个 Lebesgue 零测集以及 (3.5) 成立.

第二步, 我们将证明 $u(x)$ 一定是关于某一点径向对称且单调递减的. 首先, 我们断言: x_1 可继续向右移动只要 (3.5) 成立. 具体而言, 若存在一个 $\tau_1 < 0$, 使得 $u(x) \geqslant u_{\tau_1}(x), x \in \Sigma_{\tau_1}$ 但是 $u(x) \not\equiv u_{\tau_1}(x)$, 则我们一定可以推出存在一个仅依赖于 n,p 以及 $u(x)$ 本身的 ε, 使得下列条件成立:

$$u(x) \geqslant u_\tau(x), \quad \forall\, x \in \Sigma_\tau, \forall\, \tau \in [\tau_1, \tau_1+\varepsilon). \tag{3.8}$$

事实上, 由引理 2.2 及引理 2.6 知 $\Sigma_{\tau_1}^u$ 的闭集 $\overline{\Sigma_{\tau_1}^u}$ 为一个 Lebesgue 零测集. 同时注意到 $\lim_{\tau\to\tau_1} \Sigma_\tau^u \subset \overline{\Sigma_{\tau_1}^u}$ 以及

$$\|u_\tau(x) - u(x)\|_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}(\Sigma_\tau^u)} \leqslant C\|u_\tau\|^{q-1}_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}(\Sigma_\tau^u)} \|u_\tau - u\|_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}(\Sigma_\tau^u)}. \tag{3.9}$$

这结合 $u \in L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}(\mathbb{R}^n)$ 能保证我们能选取一个充分小的 ε 使得对于任意的 $\tau \in [\tau_1, \tau_1+\varepsilon)$ 有 $C\|u_\tau\|^{q-1}_{L^{\frac{n(q-1)}{n+p}}(\Sigma_\tau^u)} \leqslant 1/2$. 类似地, 由 (3.9) 以及引理 2.2, 我们推出 Σ_τ^u 一定是一个空集. 因此这就证明了断言. 若我们继续移动这个平面, 则这个平面一定在 $x_1 = \tau_0$ ($\tau_0 \leqslant 0$) 处停止. 由于 x_1 是任意选的, 所以 $u(x)$ 一定是关于某一点径向对称且单调递减的.

下面转向定理 1.1 第二部分的证明. 即方程 (1.1) 中的参数对 $(p,q) \in (0,\infty) \times (-\infty,0)$ 且 $p\,q + q + 2n = 0$ 的情形. 首先, 我们将推出一个有用的先验估计: 若 u 是方程 (1.1) 的一个非负解, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1} \cdot b \cdot u^q(y) dy dx = 0. \tag{3.10}$$

显然, 这与引理 2.3 相矛盾. 因此, 为完成定理 1.1 第二部分的证明, 我们只需要证明 (3.10) 成立.

注意到 $f(t) = t^{1+q}$ 是一个 C^1 函数. 结合引理 2.5 以及弱导数的链式法则, 则在分布意义下, 我们有

$$\nabla u^{1+q}(x) = (1+q)p \int_{\mathbb{R}^n} u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1} \frac{(x-y)}{|x-y|} u^q(y) dy. \tag{3.11}$$

取特殊检验函数 $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ 使得

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad \eta(t) \equiv 1, \quad \text{当 } |t| \leqslant 1 \text{ 时},$$

以及

$$\operatorname{supp}(\eta) \subset [0,2), \quad |\eta'(t)| \leqslant 2, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

对于任意的 $R>1$, 在 (3.11) 两边乘以 $\eta(\frac{|x|}{R})x \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|}{R}\right) u^q(x)\ x \cdot \nabla u(x) dx \\ &\qquad = p \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|}{R}\right) u^q(x) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (b+|x-y|)^{p-1} x \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|} u^q(y) dy \right\} dx. \end{aligned} \tag{3.12}$$

由分部积分公式, 我们可重写 (3.12) 左边等式如下:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|}{R}\right) u^q(x) x \cdot \nabla u(x) dx \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{q+1} \eta\left(\frac{|x|}{R}\right) x \cdot \nabla u^{1+q}(x) dx \\ &\quad = -\frac{n}{1+q} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|}{R}\right) u^{1+q}(x) dx - \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla\left(\eta\left(\frac{|x|}{R}\right)\right) \cdot x \quad u^{1+q}(x) dx \\ &\quad \triangleq A + B. \end{aligned} \tag{3.13}$$

由引理 2.3, 我们有 $u^{1+q} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 这结合 $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ 可得

$$\lim_{R\to\infty} A = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-n}{1+q} u^{1+q}(x) dx. \tag{3.14}$$

注意到 $|\nabla(\eta(|x|/R)) \cdot x| = \frac{1}{R}\ |\eta'(|x|/R) \frac{x}{|x|} \cdot x| \leqslant \frac{2|x|}{R}$, 我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla(\eta(|x|/R)) \cdot x\ u^{1+q}(x) dx| \leqslant 4 \int_{R \leqslant |x| \leqslant 2R} u^{1+q} dx, \tag{3.15}$$

再结合 $u^{1+q} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 以及 (3.14) 可知

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|}{R}\right) u^q(x) x \cdot \nabla u(x) dx \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-n}{1+q} u^{1+q}(x) dx - \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{1+q} \nabla\left(\eta\left(\frac{|x|}{R}\right)\right) \cdot x u^{1+q}(x) dx \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-n}{1+q} u^{1+q}(x) dx. \end{aligned} \tag{3.16}$$

此外，由 (1.1), 我们可重述 (3.12) 右边的等式如下:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} p\ \eta\left(\frac{|x|}{R}\right) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1} x \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|} u^q(y) dy \right\} dx \\ &\quad = \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|}{R}\right) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1} |x-y| u^q(y) dy \right\} dx \\ &\qquad + \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{|x|}{R}\right) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1} (x+y) \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|} u^q(y) dy \right\} dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\eta\left(\frac{|x|}{R}\right)u^{q+1}(x)dx - \frac{p}{2}b\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\eta\left(\frac{|x|}{R}\right)(b+|x-y|)^{p-1}u^q(x)u^q(y)dxdy\\
&\quad + \frac{p}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\eta\left(\frac{|x|}{R}\right)\left\{\int_{\mathbb{R}^n}u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1}(x+y)\cdot\frac{(x-y)}{|x-y|}u^q(y)dy\right\}dx\\
&\triangleq \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 + \mathscr{B}. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

为在 (3.17) 中取极限, 我们现分别证明 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{B}$ 是收敛的. 首先, 我们考虑 $\mathscr{B}$. 当 $p \geqslant 1$ 时, 因为 $|x+y| \leqslant |x|+|y|$, 我们有 $(b+|x-y|)^{p-1}|(x+y)| \leqslant (b+(1+|x|)(1+|y|))^{p-1}(|x|+|y|) \leqslant (b+(1+|x|)(1+|y|))^p$. 因此, 由引理 2.3 易得

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B} &\leqslant \frac{p}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1}|(x+y)|\cdot u^q(y)dy\right\}dx\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(b+(1+|x|)(1+|y|))^p u^q(y)u^q(x)dxdy < \infty. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

当 $0 < p < 1$ 时, 易推出 $(b+|x-y|)^{p-1}|(x+y)| \leqslant (|x-y|)^{p-1}(|x|+1)(1+|y|)$. 同时, 由 (2.11), 对于任意的 $\forall s > \frac{-n}{pq}$ 以及 $R \geqslant 1$, 我们有

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}(|x|u^q(x))^s dx &= \int_{|x|\leqslant R}(|x|u^q(x))^s dx + \int_{|x|\geqslant R}(|x|u^q(x))^s dx\\
&\leqslant C\left(\int_{|x|\leqslant R}(|x|(|x|^p+1)^q)^s dx + \int_{|x|\geqslant R}(|x|^{pq+1})^s dx\right)\\
&\leqslant C_n\left((R(R^p+1)^q)^s R^n + \int_R^\infty r^{pqs+n-1}dr\right)\\
&\leqslant (R\,(R^p+1)^q)^s\ R^n + R^{pqs+n}, \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

这结合 (2.11) 可知 $(1+|x|)u^q(x) \in L^s(\mathbb{R}^n)$. 因此, 由 $\frac{2n}{2n+p-1} > \frac{-n}{pq}$ 以及引理 2.1, 我们有

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B} &\leqslant \frac{p}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1}|(x+y)|\cdot u^q(y)dy\right\}dx\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}(|x-y|)^{p-1}(|x|+1)(1+|y|)u^q(y)u^q(x)dxdy\\
&\leqslant \|(1+|x|)u^q\|_{L^{\frac{2n}{2n+p-1}}} < \infty. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

现在来考虑 $\mathscr{A}_1$ 以及 $\mathscr{A}_2$. 因为 $u \in L^{1+q}(\mathbb{R}^n)$, 所以我们只需要考虑 $\mathscr{A}_2$. 注意到当 $p < 1$ 时, 我们有 $(b+|x-y|)^{p-1} \leqslant b^{p-1}$. 再由 (2.11) 可知 $\mathscr{A}_2$ 是有界的. 而当 $p \geqslant 1$ 时, 易得 $(b+|x-y|)^{p-1} \leqslant (b+(1+|x|)(1+|y|))^{p-1} \leqslant (b+(1+|x|)(1+|y|))^p \leqslant 2^p(b^p+(1+|x|)^p(1+|y|)^p)$. 再一次由 (2.11) 可知 $\mathscr{A}_2$ 是有界的. 因此, 由 (3.17), (3.18) 和 (3.20) 以及控制收敛定理, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to\infty} p\int_{\mathbb{R}^n}\eta\left(\frac{|x|}{R}\right)\left\{\int_{\mathbb{R}^n}u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1}x\cdot\frac{(x-y)}{|x-y|}u^q(y)dy\right\}dx\\
&\quad = \frac{p}{2}\int_{\mathbb{R}^n}u^{q+1}(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1}\cdot b\cdot u^q(y)dydx\\
&\qquad + \frac{p}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1}(x+y)\cdot\frac{(x-y)}{|x-y|}u^q(y)dy\right\}dx\\
&\quad \triangleq \mathscr{B}_1 - \mathscr{B}_2 + \mathscr{B}_3. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

在 $\mathscr{B}_3$ 中互相交换 x 与 y 的位置, 我们容易推出 $\mathscr{B}_3 = 0$. 因此, 结合 (3.16) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \frac{-n}{1+q} u^{1+q}(x)dx \\
&\quad = \frac{p}{2} \int_{\mathbb{R}^n} u^{q+1}(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u^q(x)(b+|x-y|)^{p-1} \cdot b \cdot u^q(y)dydx. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

由于 $pq + p + 2n = 0$, 我们推出 (3.10) 成立. 定理 1.1 得证.

参考文献

1 Lieb E H. Sharp constants in the Hardy-LittleWood-Sobolev and related inequalities. Ann of Math, 1983, 118: 349–374

2 Chen W X, Li C M, Ou B. Classification of solutions for a system of integral equation. Comm Partial Differential Equations, 2005, 30: 59–65

3 Lieb E H, Loss M. Analysis. 2nd ed. In: Graduate Studies in Mathematics, vol. 14. Providence, RI: Amer Math Soc, 2001

4 Chen W X, Li C M. Metheod on Nonlinear Elliptic Equations. SPIN AIMS' internal project number, Monograph, 2010

5 Li Y Y. Remark on some conformally invariant integral equations: the method of moving spheres. J Eur Math Soc, 2004, 6: 153–180

6 Xu X W. Uniqueness and non-existence theorem for conformally invariant equations. J Funct Anal, 2005, 222: 1–28

7 Chen W X, Li C M, Ou B. Classification of Solutions for an Integral equation. Comm Pure Appl Math, 2006, 54: 330–343

8 Chen W X, Li C M, Ou B. Alternative proofs on the radial Symmetry and Monotonicity of Positive Regular Solution to a Singular Integral Equation. 2005, preprint

9 Xu X W. Uniqueness theorem for integral equations and its application. J Funct Anal, 2007, 247: 95–109

10 Xu X W. Exact solution of nonlinear conformally invariant integral equation. Adv Math, 2005, 194: 485–503

11 Fefferman C, Graham R. Conformal Invariants in The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984), Astérisque, 1985; Numero Hors Serie, 95–116

Existence of positive solution to a perturbed conformal invariant integral equation

XU JianKai, WU HuoXiong & TAN Zhong

Abstract In this article, the existence of non-negative solution to a perturbed conformal invariant integral equation was studied. As $p \in (-n, 0), q > 0$ such that $pq + p + 2n = 0$, the existence of non-negative solutions to perturbed integral equation is established, however as $p \in (0, \infty), q < 0$ such that $pq + p + 2n = 0$, we show the perturbed integral equation has not non-negative solutions, which is different from the original conformal invariant integral equation and denotes the existence of integral equation is determined by the behavior of solution near infinity.

Keywords **integral equations, contraction mapping, moving plane method, radial symmetric solution, hardy-Littlewood-Sobolev inequality**

MSC(2010) **45E10, 45M2, 35J45**

doi: **10.1360/012011-119**